Una exploración rigurosa de la Modelo Black-Scholes-Merton:

Fundamentos de finanzas cuantitativas

Aurokrishna Ravindran Lakshmi

Universidad de Buffalo

1 de enero de 2025

Abstracto

Este documento presenta una visión integral del modelo Black-Scholes-Merton, piedra angular de las finanzas cuantitativas. Explora sus fundamentos teóricos, supuestos y aplicaciones prácticas en la valoración de opciones.
Este trabajo pretende demostrar una comprensión profunda de los principios del modelo y su importancia en los mercados financieros, reflejando el conocimiento adquirido a través de un estudio riguroso y rigor matemático.

Reconocimiento

Quisiera expresar mi agradecimiento a John C. Hull, cuyo libro "Opciones, Futuros y Otros Derivados" ha sido un recurso invaluable para ampliar mi comprensión de los conceptos de finanzas cuantitativas, en particular el modelo Black-Scholes-Merton. Este documento se inspira en la amplia cobertura y las claras explicaciones que ofrece la obra de Hull.

Contenido

1 Introducción y contexto

1.1 Introducción a las opciones y derivados

Los derivados son instrumentos financieros cuyo valor se deriva de un activo subyacente (por ejemplo, acciones, bonos, materias primas). Las opciones, un tipo de contrato derivado, otorgan el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender un activo a un precio de ejercicio específico antes o al vencimiento.

Punto clave: Las opciones proporcionan beneficios de apalancamiento y cobertura, lo que las hace cruciales en la gestión de riesgos.

1.2 Importancia de los modelos de valoración de opciones

- Por qué necesitamos modelos: Las opciones tienen resultados no lineales; necesitamos una forma sistemática de valorarlas en condiciones de incertidumbre.

- Eficiencia del mercado: Un modelo de precios sólido ayuda a garantizar precios de mercado justos, reducir el arbitraje y ayudar en la toma de decisiones financieras (cobertura, especulación, etc.).

Punto clave: Sin un marco de precios sólido, los mercados pueden fijar precios incorrectos del riesgo, lo que genera posibles ineficiencias u oportunidades de arbitraje.

1.3 La importancia del modelo Black-Scholes Merton

El modelo Black-Scholes-Merton, publicado en 1973 por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton, revolucionó la valoración de opciones al ofrecer una solución de formato cerrado para opciones de tipo europeo. Constituye la base de la valoración moderna de derivados y sirve de base para muchos modelos más extendidos o sofisticados (p. ej., volatilidad estocástica y difusión por saltos).

Punto clave: Black-Scholes-Merton (BSM) proporcionó el primer método matemáticamente riguroso y ampliamente aceptado para fijar el precio de una opción de compra o venta europea, cambiando drásticamente el panorama de las finanzas.

2 Procesos estocásticos y el proceso de Wiener

2.1 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una secuencia $\{X_t\}$ de variables aleatorias indexadas por t. En un contexto financiero, esto representa cómo los precios de los activos varían aleatoriamente a lo largo del tiempo.

2.2 Paseo aleatorio → Límite continuo

- Paseo aleatorio discreto: $X_{t+1} = X_t + \quad t$, donde $t \quad N(0, \sigma^2)$

- Como $\Delta t \to 0$, esto conduce al proceso de Wiener (movimiento browniano)

2.3 Proceso de Wiener (movimiento browniano)

1. Definición: W_t con $W_0 = 0$, incrementos independientes y $W_t - W_s$ N (0, t − s)
2. Notación diferencial: dW_t $\sqrt{dt}\, Z$, donde Z N (0, 1)
3. Propiedad clave: $E[dW_t] = 0$, $Var(dW_t) = dt$

2.4 Solicitud de Finanzas

El proceso de Wiener constituye la base de los modelos de tiempo continuo en finanzas:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \text{ (próximamente en GBM)} \tag{1}$$

Esta formulación es crucial en las derivaciones de Black-Scholes-Merton.

3 Movimiento browniano geométrico (GBM)

3.1 SDE para GBM

La ecuación diferencial estocástica (EDS) para el movimiento browniano geométrico es:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \quad , \tag{2}$$

dónde:

- S_t : Precio de la acción en el momento t
- μ: Deriva (rendimiento esperado)
- σ: Volatilidad
- Peso : Proceso estándar de Wiener

3.2 Reescribir en forma relativa

Podemos reescribir la SDE en forma relativa:

$$\frac{dS_t}{\text{Calle}} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t\,. \tag{3}$$

3.3 Solución mediante integración

Integrar ambos lados de 0 a t:

$$\int_0^{\text{el}} \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^{\text{el}} \mu\, du + \int_0^{\text{el}} \sigma dW_u\,. \tag{4}$$

El lado izquierdo se convierte en $\ln S_t - \ln S_0$.

3.4 Registro de St

Usando el Lema de Ito (ver Parte 4 para detalles de derivación), obtenemos:

$$\ln S_t - \ln S_0 = \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t . \tag{5}$$

3.5 Expresión de forma cerrada

La solución en forma cerrada para St es:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t . \tag{6}$$

3.6 Distribución lognormal

ln St se distribuye normalmente con:

$$\text{Media} = \ln S_0 + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \; t, \tag{7}$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 \; \text{toneladas} \tag{8}$$

Por lo tanto, St Lognormal(. . .).

3.7 Relevancia en Finanzas

- Supuesto BSM: los precios de las acciones siguen el GBM para la fijación de precios de opciones en el tiempo continuo.
- Captura la deriva y la volatilidad de manera realista y continua.

4 Lema de Ito

4.1 Declaración general

Sea Xt :

$$dX_t = a(X_t , t)\, dt + b(X_t , t)\, dW_t . \tag{9}$$

Para V (t, Xt), el lema de Ito establece:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right) dt + b\frac{\partial V}{\partial X}\, dW_t . \tag{10}$$

4.2 Motivación

A menudo necesitamos d((St)) para una función , p. ej., (St) = ln(St) o el pago de una opción. La diferenciación ordinaria falla porque dWt tiene varianza dt. La clave es que surge un extra de $\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}$ término la parte estocástica.

4.3 Derivación (Esquema simplificado)

La idea es expandir V (t + ∆t, Xt+∆t) con una serie de Taylor:

$$V(t + \Delta t, X_t + \Delta t) \approx V + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial X}\Delta X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(\Delta X)^2 + \ldots \tag{11}$$

En términos estocásticos:

$$\Delta X = a\Delta t + b\Delta W, \quad (\Delta W)^2 \approx \Delta t. \tag{12}$$

Reúna términos en ∆t y ∆W. El límite cuando ∆t → 0 produce la fórmula de Ito.

4.4 Ejemplo: V = ln(St)

Supóngase que $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$. Entonces $V(t, S_t) = \ln(S_t)$. Calcular las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}. \tag{13}$$

Conéctese al lema de Ito:

$$d(\ln S_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}(\ln S_t) + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t . \tag{14}$$

4.5 Contexto financiero

El lema de Ito es esencial para derivar ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de fijación de precios de opciones, valoraciones neutrales al riesgo y otras transformaciones (por ejemplo, de S_t a $\ln S_t$ o de un precio de un activo a un pago de una opción).

5 Valoración neutral al riesgo

5.1 Concepto de neutralidad de riesgo

La idea clave es fijar el precio de un derivado tomando el valor esperado de su pago descontado bajo una medida neutral al riesgo Q. En un mundo sin arbitraje con una tasa constante libre de riesgo r:

$$\text{Precio derivado en } t = e^{-r(T-t)}\, E^Q\left[\text{Pago en } T \mid F_t\right]. \tag{15}$$

5.2 Teorema de Girsanov (alto nivel)

El teorema de Girsanov cambia la medida de la medida del mundo real P a la medida neutral al riesgo Q. Bajo Q, la deriva del activo se convierte en r, es decir, μ se reemplaza por r.

5.3 SDE neutral al riesgo para el precio de las acciones

Original (mundo real):

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW^P_t . \tag{16}$$

Bajo Q neutral al riesgo:

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW^Q_t , \tag{17}$$

donde W^Q_t es un proceso de Wiener bajo Q.

5.4 El precio del activo descontado es una martingala

Definir $\tilde{S}_{el} = e^{-rt} S_t$. Bajo Q, $\tilde{S}_{el}$ evoluciona con deriva cero (propiedad de martingala):

$$d\tilde{S}_{el} = e^{-rt}\sigma S_t \, dW^Q_t \, . \tag{18}$$

Esto implica que no hay almuerzo gratis: el crecimiento esperado bajo Q es exactamente r, por lo que el precio descontado no tiene deriva.

5.5 Fórmula práctica

Valor derivado en el tiempo 0:

$$V_0 = e^{-rT} E^Q \, \text{Pago}(S_T). \tag{19}$$

Ejemplo de un call europeo con un pago máximo $(S_T - K, 0)$: E Q

$$C_0 = e^{-rT} \, \text{máx.} \, (S_T - K, 0). \tag{20}$$

6 Derivación de la EDP de Black-Scholes

6.1 Argumento de cobertura

Considere una derivada $V(t, S_t)$. Cubra mediante posiciones cortas en Δ unidades del subyacente S_t. La cartera es:

$$\Pi_t = V(t, S_t) - \Delta S_t \, . \tag{21}$$

6.2 Cartera sin arbitraje y sin riesgo

Elija Δ = tasa $\overline{\partial V \partial S}$ para eliminar la exposición a dS_t en primer orden. Entonces Π_t debería ganar el libre de riesgo r si realmente es libre de riesgo:

$$d\Pi_t = r \, \Pi_t \, dt. \tag{22}$$

6.3 Dinámica de Π_t

Del Lema de Ito (Parte 4) y la SDE para S_t bajo la medida neutral al riesgo (Parte 5):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\sigma^2 S_t^2) \, dt, \tag{23}$$

$$dS_t = rS_t \, dt + \sigma S_t \, dW^Q_t \, . \tag{24}$$

Por eso,

$$d\Pi_t = dV - \Delta \, dS_t \, . \tag{25}$$

6.4 Inserte $\Delta = \overline{\partial V \partial S}$

Sustituir en $d\Pi_t$:

$$d\Pi_t = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt}_{\text{términos no cancelados}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S} dS_t - \Delta \, dS_t}_{\text{cubierto}} \, . \tag{26}$$

Los términos dS_t se cancelan exactamente.

6.5 Equivalente al crecimiento libre de riesgo

Sin arbitraje,

$$d\Pi_t = r\,\Pi_t\,dt = r\left(V - \Delta\,S_t\right)dt. \tag{27}$$

Equiparar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S_t\right). \tag{28}$$

6.6 PDE de Black-Scholes

Arreglar de nuevo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r\,S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \tag{29}$$

6.7 Interpretación

Esta es la EDP básica para determinar el precio de una opción de estilo europeo sobre una acción que no paga dividendos. El siguiente paso (Parte 7) muestra la transformación a una ecuación de calor.

7 Analogía de la ecuación del calor

7.1 EDP de Black-Scholes (de la Parte 6)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0. \tag{30}$$

7.2 Transformaciones clave

Cambio de variables:

$$\tau = T - t \text{ (tiempo hasta el vencimiento)}, \quad x = \ln(S). \tag{31}$$

A menudo se establece un ansatz, por ejemplo:

$$V(t, S) = e^{-\alpha x - \beta t}\, u(\tau, x), \tag{32}$$

donde α y β son constantes elegidas para simplificar los términos (los detalles varían según la referencia).

7.3 Derivar EDP en τ, x

Calcular derivadas parciales de V con respecto a t, S y sustituir en la EDP de Black-Scholes. Después de un álgebra cuidadosa (usando $\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, etc.), se obtiene una EDP de tipo difusión para $u(\tau, x)$.

7.4 Forma resultante de la "ecuación de calor"

Forma final típica (versión simplificada):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - r\,u. \tag{33}$$

Con más manipulaciones (y eligiendo α, β adecuadamente), esto se reduce a una ecuación de calor estándar en la variable τ.

7.5 Importancia

- Más fácil de resolver: la transformación en una ecuación de calor/difusión aprovecha la conocida métodos de solución.

- Analogía: Conducción de calor en física ↔ Difusión del precio de las opciones en finanzas.

8 Solución de forma cerrada de Black-Scholes

8.1 Opción de compra europea

Pago al vencimiento T: máx. $(S_T - K, 0)$. Bajo la medida neutral al riesgo Q:

$$C_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^Q \left[\max(S_T - K, 0) \right]. \tag{34}$$

8.2 Distribución lognormal de S_T

Si S_t sigue

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t^Q, \tag{35}$$

entonces

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z \right), \quad Z \sim N(0, 1). \tag{36}$$

8.3 Resultado estándar mediante ecuación de calor o integración directa

Después de resolver la EDP transformada (Parte 7), obtenemos:

$$C_0 = S_0\, N(d_1) - K\, e^{-rT} N(d_2), \tag{37}$$

dónde

$$d_1 = \frac{\text{en}\,\frac{S_0}{K} + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{38}$$

TN(·) es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar.

8.4 Opción de venta europea

Por paridad put-call o directamente:

$$P_0 = K\, e^{-rT} N(-d_2) - S_0\, N(-d_1). \tag{39}$$

8.5 Intuición de d_1, d_2

- d_1 se relaciona con la puntuación z del precio logarítmico esperado en relación con el precio de ejercicio.

- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ se desplaza por volatilidad/tiempo.

8.6 Interpretación

- $S_0\, N(d_1)$: Probabilidad "ajustada al riesgo" de terminar con dinero en Q.

- $K\, e^{-rT} N(d_2)$: Pago de ejercicio descontado, también bajo Q.

- Esta fórmula revolucionó la fijación de precios de derivados (práctica, forma cerrada).

9 Griegos y análisis de sensibilidad

9.1 Resumen de los griegos

Propósito: Medir cómo cambia el valor de la opción V con respecto a los parámetros: S_0 (precio subyacente), σ (volatilidad), r (tasa de interés) y t (tiempo).

9.2 Delta Δ

Definición: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$.

Para una convocatoria europea (de la Parte 8):

$$\Delta_{\text{llamada}} = N(d_1). \tag{40}$$

Interpretación: Cambio aproximado en el precio de la opción por un cambio de $1 en el activo subyacente.

9.3 Gamma Γ

Definición: $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_0}$.

Para una convocatoria europea:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \quad \text{donde } N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}. \tag{41}$$

Interpretación: Mide qué tan rápido cambia Δ con S_0.

9.4 Vega v

Definición: $v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$.

Para una convocatoria europea:

$$v = S_0 \sqrt{T}\, N'(d_1). \tag{42}$$

Interpretación: Sensibilidad a los cambios de volatilidad.

9.5 Theta Θ

Definición: $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ (a menudo expresado como $-\frac{\partial V}{\partial T}$ con T = tiempo hasta el vencimiento).

Para una Convocatoria Europea (en términos de tiempo hasta el vencimiento T):

$$\Theta \approx -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} N(d_2). \tag{43}$$

Interpretación: "Decaimiento temporal" diario del valor de la opción.

9.6 Rho ρ

Definición: $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$.

Para una convocatoria europea:

$$\rho = KT e^{-rT} N(d_2). \tag{44}$$

Interpretación: Sensibilidad a cambios en las tasas de interés.

9.7 Uso práctico

- Gestión de riesgos: los operadores ajustan los ratios de cobertura, monitorean la exposición a Gamma, etc.
- Análisis de escenarios: evaluar cómo podría cambiar el valor de una opción si cambia σ o S_0 .

10 métodos numéricos

10.1 ¿Por qué numérico?

- Algunas derivadas (por ejemplo, dependientes de la trayectoria) carecen de soluciones de forma cerrada.
- Aproximación mediante métodos computacionales.

10.2 Métodos de diferencias finitas

- Discretizar la EDP de Black-Scholes en el tiempo y en el espacio de precios de acciones.
- Esquemas: Explícito, Implícito, Crank-Nicolson.
- Utilizar condiciones de contorno (pago de la opción al vencimiento, comportamiento cuando $S \to 0$ o $S \to \infty$) para iterar y encontrar V .

10.3 Simulaciones de Monte Carlo

- Simular trayectorias aleatorias bajo la medida neutral al riesgo:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z\right], \quad Z \sim N(0, 1). \tag{45}$$

- Calcular el rendimiento para cada ruta, el descuento y el promedio.
- Precisión ↑ como número de caminos ↑.

10.4 Consideraciones prácticas

- Compensación: más puntos de cuadrícula/más rutas → mayor precisión, pero más computación tación.
- Ampliamente utilizado para opciones exóticas donde los enfoques PDE son complejos.

11 Extensiones del modelo

11.1 Acciones que pagan dividendos

Si el rendimiento continuo del dividendo = q, entonces bajo Q:

$$dS_t = (r - q)S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t^Q. \tag{46}$$

La fórmula de Black-Scholes se modifica a:

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \tag{47}$$

dónde

$$d_1 = \frac{\text{en} \frac{S_0}{K} + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}. \tag{48}$$

11.2 Opciones americanas

- Posibilidad de ejercicio anticipado (por ejemplo, opción de venta estadounidense sobre acciones sin dividendos).
- No existe una forma cerrada simple (excepto algunos casos especiales).
- Métodos: Árboles Binomiales, Diferencias Finitas con condición de borde libre.

11.3 Modelos de volatilidad estocástica

Modelo de Heston: La volatilidad sigue su propia SDE, por ejemplo,

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t}\, dW_t^v. \tag{49}$$

Las direcciones vol smile/skew no se capturan mediante la constante σ.

11.4 Modelos de difusión por salto

Añadir saltos a la dinámica de precios (por ejemplo, modelo de salto de Merton):

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW^Q + \text{saltos}. \tag{50}$$

Útil para capturar movimientos de precios grandes y discretos.

11.5 Otras extensiones

- Volatilidad local: $\sigma = \sigma(S_t, t)$.
- Modelos de tasas de interés (Hull–White, etc.) para derivados de tasas de interés.

12 Ejemplo práctico

12.1 Parámetros dados

- $S_0 = 100$ (precio actual de la acción)
- $K = 110$ (huelga)
- $T = 1$ año (tiempo hasta el vencimiento)
- $r = 0{,}05$ (tasa libre de riesgo)
- $\sigma = 0{,}20$ (volatilidad)

12.2 Calcular d1 y d2

$$S0\ d1 = \frac{\text{en}\ \frac{}{K} + r + \frac{1}{2}\sigma^2\ T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{51}$$

Insertar números:

$$\text{en}\ d1 = \frac{\frac{100}{110} + 0{,}05 + 0{,}5 \times 0{,}2^2 \times 1}{0{,}2\sqrt{1}}$$

$$= \frac{\ln(0{,}9091) + 0{,}05 + 0{,}02\ 0{,}2\ -0{,}0953}{+}$$

$$= \frac{0{,}07}{0{,}2}$$

$$= \frac{-0{,}0253}{0{,}2}$$

$$\approx -0{,}1265.$$

$$d2 = -0{,}1265 - 0{,}2 \approx -0{,}3265.$$

12.3 Encuentra N(d1) y N(d2)

Utilice una tabla CDF normal estándar o una calculadora:

$$N(-0{,}1265) \approx 0{,}4496, \quad N(-0{,}3265) \approx 0{,}3724.$$

Por eso,

$$N(d1) = 1 - 0{,}4496 = 0{,}5504, \quad N(d2) = 0{,}3724 \text{ (corregido)}.$$

12.4 Conéctese a la fórmula de compra de Black-Scholes

$$C0 = S0N(d1) - Ke - rTN(d2). \tag{52}$$

Calcular cada término:

$$S0N(d1) = 100 \times 0{,}5504 = 55{,}04,$$

$$Ke{-}rTN(d2) = 110\ e^{-0{,}05\times 1} \times 0{,}3724$$

$$\approx 110 \times 0{,}9512 \times 0{,}3724$$

$$\approx 110 \times 0{,}3544$$

$$\approx 38{,}98.$$

Por eso,

$$C0 \approx 55{,}04 - 38{,}98 = 16{,}06.$$

12.5 Interpretación

- Precio de llamada ≈ 16,06.
- Más alto que las expectativas ingenuas porque todavía hay una posibilidad considerable de que la acción pueda... terminar por encima de 110 en un año, más factores de valor temporal y volatilidad.

13 Limitaciones del modelo Black-Scholes y la práctica Implicaciones prácticas

13.1 Supuestos vs. Mercados Reales

El modelo de Black-Scholes hace ciertas suposiciones que no coinciden totalmente con el funcionamiento de los mercados reales:

13.1.1 Volatilidad constante

- El modelo supone que la volatilidad se mantiene igual a lo largo del tiempo.
- En realidad, la volatilidad cambia y depende de los precios de ejercicio y los vencimientos, lo que crea La volatilidad sonríe y sesga.

13.1.2 Sin costos de transacción

- El modelo supone que la negociación no tiene costos (ni comisiones, ni diferenciales entre oferta y demanda, ni deslizamiento).
- En los mercados reales, estos costos pueden ser significativos, especialmente durante períodos de alta volatilidad. o baja liquidez.

13.1.3 Cobertura continua

- Supone que los traders pueden reequilibrar sus posiciones continuamente sin demoras.
- Pero en la vida real, la cobertura se produce a intervalos (discreta), lo que puede ser costoso y generar pequeños riesgos.

13.1.4 Sin saltos en los precios

- El modelo supone que los precios de las acciones se mueven suavemente.
- Los precios reales pueden subir debido a noticias o eventos inesperados, algo que este modelo no hace. captura.

13.2 Desafíos prácticos

Estas suposiciones pueden crear problemas en el mundo real:

13.2.1 Precios erróneos

Las opciones pueden tener precios incorrectos, y las griegas (como Delta y Vega) pueden no ser siempre precisas. Esto puede generar estrategias de cobertura deficientes y pérdidas inesperadas.

13.2.2 Ajustes por parte de los comerciantes

Los traders a menudo utilizan superficies de volatilidad implícita (ajustes a las realidades del mercado) o adoptan modelos más avanzados para lidiar con estas brechas.

13.3 Extensiones para mejorar el modelo

Para abordar estos problemas, se han desarrollado algunas versiones mejoradas del modelo Black-Scholes:

13.3.1 Modelos de volatilidad estocástica

Estos modelos permiten que la volatilidad varíe con el tiempo. Por ejemplo, el modelo de Heston es popular en la práctica.

13.3.2 Modelos de volatilidad local

Estos utilizan datos del mercado para ajustar la volatilidad en función del precio de las acciones y el tiempo, proporcionando precios más precisos.

13.3.3 Modelos de difusión por salto

Modelos como el modelo Merton Jump-Diffusion incluyen saltos repentinos de precios junto con cambios de precios regulares para manejar mejor los eventos inesperados.

14 Resumen y mi recorrido de aprendizaje

14.1 La aventura de Black-Scholes-Merton

¡Ha sido un viaje increíble recorrer el modelo Black-Scholes! Permítanme explicarlo.

Todo empezó con procesos estocásticos. Recuerdo que al principio me sentí un poco abrumado, pero es fascinante cómo se puede modelar matemáticamente la aleatoriedad.

• Luego llegó el Movimiento Browniano Geométrico (MBG). Aprender cómo describe los precios de las acciones fue una auténtica maravilla para mí. Es asombroso cómo una simple ecuación puede captar la imprevisibilidad del mercado.

El lema de Ito fue difícil de descifrar. Pero una vez que lo vi aplicado a la valoración de opciones, ¡entendí! Es como una regla especial para lidiar con la aleatoriedad en cálculo.

El concepto de valoración neutral al riesgo es muy intuitivo. La idea de que podamos fijar el precio de las opciones como si todas fueran neutrales al riesgo es contraintuitiva, pero muy útil.

Derivar la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes fue como armar un rompecabezas complejo. Cada pieza, desde el lema de Ito hasta la cartera libre de riesgo, encajó a la perfección.

La analogía de la ecuación del calor fue revolucionaria para mí. Ver cómo se relaciona el precio de las opciones con la difusión del calor en la física hizo que las matemáticas parecieran más tangibles y menos abstractas.

Finalmente, llegar a la solución en forma cerrada fue como alcanzar la cima de una montaña. Después de todas las complejas derivaciones, ver esa elegante fórmula para la valoración de opciones fue realmente gratificante.

14.2 La belleza de Black Scholes

¿Qué hace que este modelo me parezca tan impresionante?

- La simplicidad y elegancia de la fórmula son asombrosas. Con solo unos pocos pasos, Podemos poner precio a las opciones: ¡parece un tesoro!

  Me asombra cómo este modelo se convirtió en la piedra angular de la teoría financiera moderna. No se trata solo de la valoración de opciones; ha cambiado nuestra forma de pensar sobre el riesgo y la valoración en finanzas.

- Los griegos (Delta, Gamma, Vega, etc.) derivados del modelo proporcionan tales Herramientas poderosas para la gestión de riesgos. Es como tener un GPS financiero.

- Aprender sobre cómo el modelo condujo al crecimiento de los mercados de derivados ha dado Me da una nueva perspectiva sobre la innovación financiera.

14.3 Reconociendo las limitaciones

A medida que profundicé, comencé a ver dónde falla el modelo:

- El supuesto de volatilidad constante ahora me parece demasiado simplificado. Real Los mercados son mucho más dinámicos.

- Ignorar los costos de transacción y asumir un comercio continuo son ideales. Entiendo cómo estas suposiciones podrían generar problemas prácticos en el comercio real.

  La dificultad del modelo para afrontar eventos extremos o subidas repentinas de precios es una limitación importante. Me ha hecho comprender la importancia de considerar los eventos de "cisne negro" en las finanzas.

  Aprender sobre las sonrisas y sesgos de la volatilidad en los mercados de opciones reales fue revelador. Me mostró cómo los participantes del mercado se adaptan a las deficiencias del modelo.

14.4 Aplicaciones prácticas y ajustes

A pesar de sus limitaciones, he aprendido que el modelo de Black-Scholes todavía se utiliza ampliamente:

- El concepto de volatilidad implícita me fascina. Es ingenioso cómo los operadores lo utilizan para aplicar ingeniería inversa a los precios del mercado y ajustar el modelo.

- Me parece interesante cómo el modelo sirve como lenguaje común en el ámbito financiero. mundo, incluso cuando se utilizan modelos más complejos detrás de escena.

- Aprender cómo se adapta el modelo a diferentes activos (como monedas o materias primas) me mostró su versatilidad.

14.5 Mis futuras exploraciones

Este viaje ha despertado mi curiosidad por seguir aprendiendo:

Me entusiasma profundizar en modelos más avanzados, como la volatilidad estocástica y los modelos de difusión por saltos. ¡El modelo de Heston, en particular, me parece fascinante!

- Explorar métodos numéricos para la valoración de opciones es mi siguiente objetivo. Me interesa comprender cómo funcionan las simulaciones de Monte Carlo y los métodos de diferencias finitas.
  práctica.

Me encantaría adquirir experiencia práctica con la calibración de modelos utilizando datos reales del mercado. Parece una excelente manera de conectar la teoría con la práctica.

- El mundo de las opciones exóticas y cómo se fijan sus precios es otra área que estoy ansioso por explorar. Explorar. Parece un campo donde la creatividad en las finanzas realmente brilla.

14.6 Reflexiones sobre mi trayectoria en Black-Scholes

Esta inmersión profunda en el modelo Black-Scholes ha sido más que simplemente aprender una fórmula; me ha abierto una nueva perspectiva financiera. Desde comprender el cálculo estocástico hasta los matices de la valoración de opciones, cada paso ha sido desafiante, pero increíblemente gratificante.

Me sorprende cómo un solo modelo puede tener un impacto tan profundo en todo un campo. No se trata sólo de matemáticas: se trata de cómo conceptualizamos el riesgo, el valor y la naturaleza de los mercados financieros.

Al recordar este recorrido, siento una sensación de logro combinada con entusiasmo por lo que está por venir. El modelo Black-Scholes me ha dado una base sólida, pero ahora lo veo como un punto de partida para explorar áreas aún más complejas y fascinantes de las matemáticas financieras.

Estoy deseando aplicar estos conceptos en situaciones reales y seguir ampliando mis conocimientos. Este viaje ha reforzado mi pasión por las finanzas y las matemáticas, y estoy entusiasmado con las posibilidades que me esperan en mis estudios y mi futura carrera profesional.